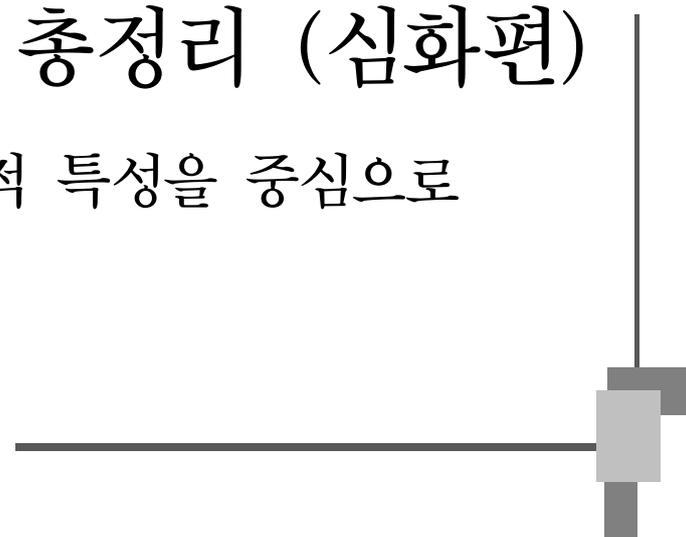




이차곡선 총정리 (심화편)

-기하학적 특성을 중심으로

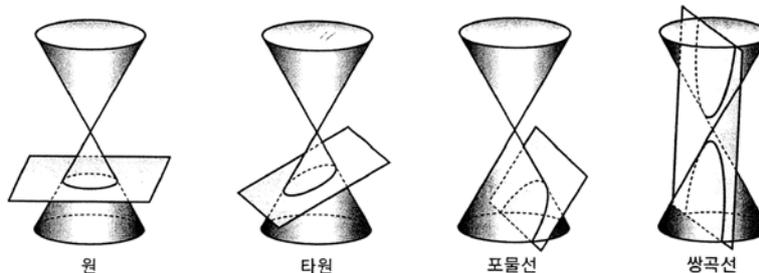


차 례

1. 이차곡선 개요	3
2. 포물선	7
(1) 포물선의 정의 및 기본 성질	
(2) 포물선의 자취	
(3) 포물선의 기하학적 특성	
3. 타원	25
(1) 타원의 정의 및 기본 성질	
(2) 타원의 자취	
(3) 타원의 기하학적 특성	
4. 쌍곡선	43
(1) 쌍곡선의 정의 및 기본 성질	
(2) 쌍곡선의 자취	
(3) 쌍곡선의 기하학적 특성	
5. 이차곡선의 기하학적 특성 요약	65

1. 이차곡선 개요

이차곡선은 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 등 이차방정식으로 나타내는 곡선의 총칭으로, 모두 원뿔의 단면이 되며 이 때문에 원뿔곡선이라고도 불린다. 원뿔곡선론은 그리스 시대의 수학자 아폴로니우스가 메나에크무스 등 그 시대의 원뿔곡선에 대한 연구를 집대성하여 총 8권으로 된 『원뿔곡선론(Conics)』을 발간함으로써 완성된 체계를 갖추었다. 아폴로니우스는 아래와 같이 원뿔을 여러 방향에서 자를 때, 자른 면과 직원뿔의 밑면이 이루는 각의 크기에 따라 다른 원뿔곡선 - 즉, 원뿔의 밑면과 평행하게 자르면 원, 밑면과 모선 사이의 각으로 자르면 타원, 모선과 평행하게 자르면 포물선, 밑면과 수직으로 자르면 쌍곡선 - 이 만들어진다는 것을 밝혀내었다. (이후에 쌍곡선은 밑면과 모선이 이루는 각보다 큰 각으로 자르기만 하면 만들어진다는 사실이 밝혀졌다.)

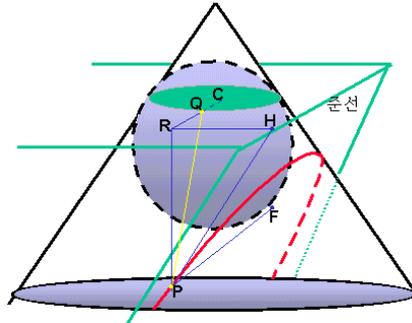


그래서 타원(ellipse)은 자른 면과 직원뿔의 밑면이 이루는 각보다 작게 자른 면에서 만들어져 ‘ellipsis(부족하다)’는 의미를 담고 있고, 포물선(parabola)은 자른 면과 직원뿔의 밑면이 이루는 각이 같은 면에서 만들어져 ‘paralole(일치하다)’는 의미를 담고 있으며, 쌍곡선(hyperbola)은 자른 면과 직원뿔의 밑면이 이루는 각보다 크게 자른 면에서 만들어져 ‘hyperbole(초과한다)’는 의미를 담고 있다.

그러면 위와 같이 원뿔을 자른 면에서 왜 원, 타원, 포물선, 쌍곡선이 나오게 되는 걸까? 원이 나오는 것은 자명하므로 생략하고 원뿔곡선을 자른 면이 포물선, 타원, 쌍곡선이 나오는 이유를 알아보자. (포물선은 한 정점과 한 정직선으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취, 타원은 두 정점으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 자취, 쌍곡선은 두 정점으로부터 거리의 차가 일정한 점들의 자취임을 이용한다.)

1. 포물선의 증명(1)

아래의 그림에서 원뿔을 모선에 평행하게 자른 단면 위의 점 P 에서 원 C 를 품는 평면과 준선에 내린 수선의 발을 각각 R, H 라 하자. 또 자른 평면과 구의 접점을 F 라 하자. 선분 RC 와 원 C 가 만나는 점을 Q 라 하면 직선 PQ 는 구의 접선이다.



구의 접선의 길이는 모두 같으므로 $PF = PQ \dots (1)$

원뿔의 축과 직선 PR 은 평행하므로 $\angle QPR$ 과 $\angle HPR$ 의 크기는 모두 축과 모선이 이루는 각이므로 같다.

$\angle QPR = \angle HPR$, PR 은 공통, $\angle QRP = \angle HRP = 90^\circ$ 이므로 $\triangle QRP \equiv \triangle HRP$

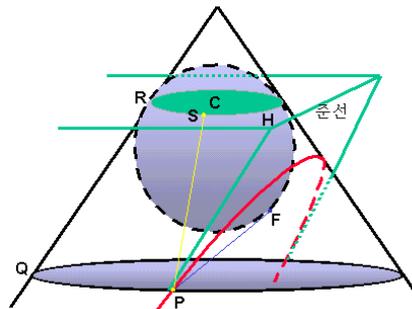
$\therefore PQ = PH \dots (2)$

(1), (2)에서 $PF = PH$

따라서 점 P 는 F 를 초점으로 하는 포물선 위의 점이다.

2. 포물선의 증명(2)

아래의 그림에서 포물선 위의 임의의 점 P 를 지나고 원뿔의 밑면과 평행한 평면과 원뿔이 한 점 Q 에서 만난다. 또 자른 평면과 구의 접점을 F 라 하자.



구의 접선의 길이는 모두 같으므로 $PF = PS \dots (1)$

원뿔대의 모선의 길이는 모두 같으므로 $PS = QR \dots (2)$

자른 평면과 모선이 평행하므로 $QR = PH \dots (3)$

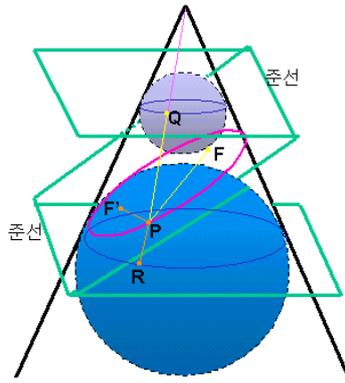
(1), (2), (3)에서 $PF = PH$

따라서 점 P 는 F 를 초점으로 하는 포물선 위의 점이다.

3. 타원의 증명

아래의 그림에서 자른 평면과 두 구가 접하는 점을 각각 F, F' 라 하자.

자른 면 위의 임의의 점을 P 라 하고 점 P 에서 원뿔의 꼭지점을 이은 직선과 두 구가 접하는 점을 각각 Q, R 이라 하자.



구의 접선의 길이는 모두 같으므로

$$PF = PQ \quad \dots (1)$$

$$PF' = PR \quad \dots (2)$$

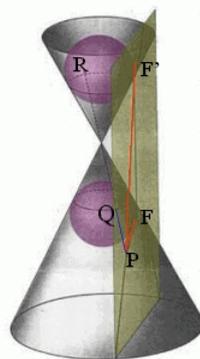
$$(1), (2) \text{에서 } PF + PF' = PQ + PR = QR (\text{일정})$$

따라서 점 P 는 F, F' 를 초점으로 하는 타원 위의 점이다.

4. 쌍곡선의 증명

아래의 그림에서 자른 평면과 두 구가 접하는 점을 각각 F, F' 라 하자.

자른 면 위의 임의의 점을 P 라 하고 점 P 에서 원뿔의 꼭지점을 이은 직선과 두 구가 접하는 점을 각각 Q, R 이라 하자.



구의 접선의 길이는 모두 같으므로

$$PF = PQ \quad \dots (1)$$

$$PF' = PR \quad \dots (2)$$

$$(1), (2) \text{에서 } PF' - PF = PR - PQ = QR (\text{일정})$$

따라서 점 P 는 F, F' 를 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점이다.

이차곡선은 각각 기하학적 특성들을 갖는데, 그 특성은 다양하게 활용되고 있다. 아르키메데스가 포물선의 축에 평행하게 입사한 빛은 초점을 향해 반사한다는 성질을 이용하여 포물곡면의 거울로 로마군의 배를 불태웠다는 전설에서부터, 현대의 자동차 전조등, 파라볼라 안테나 등에 포물선의 기하학적 특성이 이용되고 있다. 타원의 한 초점에서 출발한 빛이 타원 위의 점에서 반사하여 다른 초점을 향해 진행한다는 기하학적 특성, 쌍곡선의 한 초점을 향한 빛이 쌍곡선 위의 점에서 반사하여 다른 초점을 향해 진행한다는 기하학적 특성은 광학기계나 최신 의료기술 등에서 다양하게 활용되고 있다.

이처럼 이차곡선은 매우 재미있는 성질들을 갖고 있다. 이 교재는 고교 과정의 이차곡선을 배운 학생들이 이차곡선의 다양한 성질, 특히 기하학적 특성을 깊이있게 공부하도록 제작되었다.