매니퓰레이터 자코비안(Jacobian)

KITECH 양광웅 작성
Page365@gmail.com

메니퓰레이터의 위치 기구학에서 정기구학 식은 $\mathbf{p} = f(\mathbf{q})$ 와 같이 정의된다. 메니퓰레이터 형상이 단순한 경우, 말단장치의 위치에 대한 닫힌형태(closed form)의 역기구학 풀이를 쉽게 구한다. 하지만, 메니퓰레이터의 형상이 복잡한 경우, 함수 $f(\cdot)$ 는 비선형 관계로 역기구학을 풀지 못하는 경우가 대부분이다.

메니퓰레이터의 속도 기구학에서 정기구학 식은 $\dot{\mathbf{p}} = \dfrac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ 와 같이 정의된다. 여기서 로봇 매니퓰레이터의 자코비안 행렬 $\mathbf{J}$ 은 조인트 속도 $\dot{\mathbf{q}}$ 와 말단부(end-effector) 속도 $\dot{\mathbf{p}}$ 의 선형 관계를 나타내는 행렬 식이다. 속도 차원에서 역기구학은 자코비안의 역행렬을 구함으로써 계산할 수 있다. 자코비안 행렬 $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ 가 정방행렬일 경우, 관절의 속도는 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\dot{\mathbf{p}}$$

예로, 6개의 관절을 갖는 6-DOF 메니퓰레이터의 경우, 관절의 속도와 말단장치의 속도 관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{J}(q_0, \cdots, q_5)\right]_{6\times 6}^{-1} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

위 식에서 $\left[\mathbf{J}(q_0, \cdots, q_5)\right]$ 는 메니퓰레이터 자코비안으로 어느 한 순간의 메니퓰레이터 형상에 대한 함수이다. $\begin{bmatrix} \dot{q}_0 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 & \dot{q}_4 & \dot{q}_5 \end{bmatrix}^T$ 는 관절의 운동속도이고, $\begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T$ 와 $\begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$ 는 말단장치의 선속도와 각속도이다.

Jacobian Matrix

1차 편미분함수들을 원소로 하는 함수행렬의 행렬식을 자코비안 행렬(Jacobian Matrix)이라고 부른다. 변수 x_j 에 대한 함수 Y_i 의 함수가 다음과 같을 때,

$$Y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ Y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ Y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}.$$

변수 x_j의 변화량에 대한 함수 Y_i의 변화량은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \delta Y_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\delta x_n \\ \delta Y_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\delta x_n \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \delta Y_m = \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\delta x_n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \delta Y_1 \\ \delta Y_2 \\ \vdots \\ \delta Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & & \vdots & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{bmatrix}$$

위 식은 다음과 같이 간단하게 적을 수 있다.

$$\left[\delta Y_i\right] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\left[\delta x_j\right]$$

위와 같이 매니퓰레이터의 조인트 수가 n이고 작업 공간(Task space)에 있는 말단부의 자유도가 m인 경우, 자코비안은 m x n 행렬이 된다. 이 때 조인트 수가 말단부 자유도 수와 같은 경우(즉, $m = n$), 자코비안은 정방행렬이다. 또한 말단부 자유도 보다 구동 조인트 수가 더 많으면 ($n > m$) 여유자유도 매니퓰레이터(redundant manipulator)이라고 부른다. 3차원 공간상에서 운동하는 로봇 말단부는 최대 6자유도(병진운동 3방향, 회전운동 3방향)의 운동성(mobility)을 갖는다. 일반적인 3차원 매니퓰레이터의 자코비안을 결정하기 위해서는 별도의 체계적인 계산 규칙을 이용하는 것이 편리하다.

Geometric Jacobian 의 계산

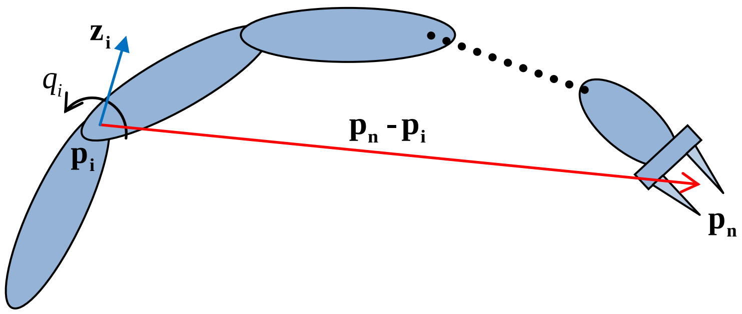
작업 공간에서 6자유도를 갖는 매니퓰레이터의 경우, Geometric 자코비안은 다음과 같이 Position Jacobian과 Orientation Jacobian으로 구분된다.

$$\dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{J}]\dot{\mathbf{q}} \iff \left(\begin{matrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J_P}(3\times n) \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\text{Position Jacobian}} \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J_O}(3\times n) \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\text{Orientation Jacobian}} \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \end{Bmatrix} \end{matrix} \right) \Rightarrow \left(\begin{matrix} \begin{Bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J_P}(3\times n) \\ ------ \\ \mathbf{J_O}(3\times n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-2} \\ \dot{q}_{n-1} \end{Bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{v_e} = [\mathbf{J_P}]\dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\omega}_\mathbf{e} = [\mathbf{J_O}]\dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \end{matrix} \right)$$

위 식에서 $\mathbf{v_e} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x & \dot{p}_y & \dot{p}_z \end{bmatrix}^T$ 는 매니퓰레이터 말단부의 속도, $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_x & \omega_x \end{bmatrix}^T$ 는 말단부의 각속도이다. 다시 자코비안은 다음과 같이 열 벡터 성분들로 구분된다.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{Jp} \\ \mathbf{Jo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Jp_1} & \mathbf{Jp_2} & \cdots & \mathbf{Jp_n} \\ \mathbf{Jo_1} & \mathbf{Jo_2} & \cdots & \mathbf{Jo_n} \end{bmatrix}$$

다음 그림과 같이 매니퓰레이터의 i 번째 링크에서 $\mathbf{p_i}$ 는 관절 좌표계(Joint coordinates system) 원점의 위치 벡터다. 회전형 관절의 경우 $\mathbf{z_i}$ 는 회전축을 따라가는 단위벡터이다. 만일 직선형 관절의 경우라면 $\mathbf{z_i}$ 는 이동축을 따라가는 단위벡터이다.



Geometric Jacobian $\mathbf{J} \in \Re^{6\times n}$ 의 i 번째 열(column)을 계산하기 위하여 다음 계산 규칙을 따른다.

$$\mathbf{J_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{Jp_i} \\ \mathbf{Jo_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z_{i-1}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{for a } \textit{prismatic} \text{ joint} \\ \begin{bmatrix} (\mathbf{p_n} - \mathbf{p_{i-1}}) \times \mathbf{z_{i-1}} \\ \mathbf{z_{i-1}} \end{bmatrix} & \text{for a } \textit{revolute} \text{ joint} \end{cases} \quad \text{for } i = 1, \cdots, n.$$

위에서 열벡터 $\mathbf{z_i}$ 와 $\mathbf{p_i}$ 를 구하기 위해서, 다음과 같이 기준 좌표계에 대한 i 번째 링크 관절 좌표계의 변환 행렬(transformation matrix) $\mathbf{T_i}$ 를 구한다.

$$\mathbf{T_0} = \mathbf{I},$$
$$\mathbf{T_i} = \mathbf{T_{i-1}}{}^{\mathbf{i-1}}\mathbf{A_i} \quad \text{for } i = 1, \cdots, n.$$
$$\mathbf{T_i} = \mathbf{A_1(q_1)A_2(q_2)A_3(q_3)} \cdots \mathbf{A_i(q_i)}$$

여기서 4 x 4 행렬 $\mathbf{T_i}$ 의 구조는 다음과 같다.

$$\mathbf{T_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{n_i} & \mathbf{o_i} & \mathbf{a_i} & \mathbf{p_i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{for } i = 1, \cdots, n.$$

$$\mathbf{z_i} = \begin{cases} \mathbf{n_i} & \text{for x-axis} \\ \mathbf{o_i} & \text{for y-axis} \\ \mathbf{a_i} & \text{for z-axis} \end{cases}.$$

Analytic Jacobian 의 계산

말단 장치의 오일러 자세각(ϕ, θ, ψ)에 대한 회전 속도($\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$)는 기준좌표계($x, y, z$)에 대한 각속도 벡터($\omega_x, \omega_y, \omega_z$)와 서로 다른 값을 갖는다. 즉, 말단부의 각속도를 $\boldsymbol{\omega_e} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} = \hat{\dot{\phi}} + \hat{\dot{\theta}} + \hat{\dot{\psi}}$ 와 같이 서로 다른 좌표 축 성분으로 분해할 수 있다. 이에 따른 자코비안도 각속도 성분에 따라 Geometric Jacobian($\boldsymbol{J}$)과 Analytic Jacobian($\boldsymbol{J_A}$)으로 구분된다. 6자유도 매니퓰레이터의 경우 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{J}]\dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = [\ \mathbf{J}\ ] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{J_A}]\dot{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = [\mathbf{J_A}] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

보통 말단 장치의 궤적을 플래닝을 할 때 오일러 자세각이 편리하므로 말단부 자세에 대한 역기구학을 풀기 위해서는 자세각에 대한 조인트 회전속도의 관계를 나타내는 Orientation 자코비안($\mathbf{J_{RPY}}$)이 필요하다. Geometric Jacobian에서 구한 Orientation Jacobian $\mathbf{Jo}$ 를 자세각 속도에 대한 자코비안 $\mathbf{J_{RPY}}$ 로 변환함으로써 Analytic Jacobian을 결정할 수 있다.

한편, 오일러 각이 $\psi(z) \rightarrow \theta(y') \rightarrow \phi(x'')$의 변환 순서를 따르는 경우, 기준좌표계에 대한 각속도 성분 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$와 오일러 자세각$(\phi, \theta, \psi)$의 회전속도 성분 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x^T(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_x^T(\phi) R_y^T(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

이것을 행렬로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{T_{RPY}} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

따라서 Geometric Jacobian의 $\mathbf{Jo}$는 Anlytic Jacobian의 $\mathbf{J_{RPY}}$와 다음 관계식을 갖는다.

$$\mathbf{Jo(q) = T_{RPY} J_{RPY}(q)}$$
$$\mathbf{J_{RPY}(q) = T_{RPY}^{-1} Jo(q)}$$

최종적으로 Analytic Jacobian 은 다음 식으로 계산된다.

$$\mathbf{J_A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Jp} \\ \mathbf{J_{RPY}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Jp} \\ \mathbf{T_{RPY}^{-1} Jo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T_{RPY}^{-1}} \end{bmatrix} \mathbf{J}$$